**5. Независимые события, схема Бернулли**

**Определение**. События и *B* называются независимыми, если

(предполагается, что оба события имеют ненулевые вероятности).

Если события и *B* независимы, то

Эту формулу можно принять и в качестве определения независимости: если события независимы, то информация о наступлении события *B* не должна влиять на вероятность события.

**Пример 5.1.** Предположим, вероятность рождения мальчика равна ½. Рассмотрим множество семей с тремя детьми и в этом множестве два события:

Всего возможно 8 вариантов таких семей: {МММ}, {ММД}, {МДМ}, {ДММ}, {МДД}, {ДМД}, {ДДМ}, {ДДД} (, и для вероятностей имеем:

Следовательно, события и *B* независимы. Проверить, что в случае семей с четырьмя детьми эти события будут зависимы.

**Упражнение 5.1.** Рассмотрим пространство элементарных исходов из Примера 1.2. Проверить независимость приведенных в этом примере событий. Показать, что в этом пространстве независимыми являются события, имеющие “ортогональную” конфигурацию, например, {} и {2} независимы.

Проверим выполнение следующего естественного свойства: если события и *B* независимы, то и *B* также независимы. Действительно, из равенства

следует

Что и требовалось.

**Упражнение 5.2.** Доказать, что если события и *B* независимы, то

если же события и *B* не являются независимыми, то вероятность заключена между и

**Пример 5.2.** Вероятность поражения цели одной бомбой равна *p* = 0,6. Какова вероятность поражения цели, если 5 самолетов сбрасывают бомбы (предполагая, что для поражения достаточно одного попадания)?

Обозначим событие {*i*-й самолет попал в цель}, тогда событий *A* = {цель поражена} можно представить как сумму , тогда

Предположим, необходимо чтобы цель была уничтожена с вероятностью не менее 0,9990, сколько самолетов необходимо направить? Обозначим это число самолетов *n*, тогда согласно полученной формуле,

Решая это уравнение относительно *n*, находим

На самом деле в решении этой задачи допущена некоторая вольность: мы знаем, что означает независимость двух событий, но здесь рассматривается несколько событий вместе, и возможно, это другое свойство, чем попарная независимость

**Определение.** События назовем независимыми в совокупности, если для любого набора

Возникает вопрос: если события независимы попарно, то обязательно ли они независимы в совокупности? Известный пример Бернштейна наглядно показывает, что это не так.

**Пример 5.3.** Пример Бернштейна. Представим тетраэдр, три грани которого покрашены соответственно – в красный, синий и зеленый цвета, а на четвертой грани – все три цвета. При случайном бросании тетраэдра на плоскость вероятности обнаружить на нижней грани каждый из цветов одинаковы:

Совместные вероятности

так что события попарно независимы, однако,

Вот еще простая иллюстрация на ту же тему.

**Пример 5.4.** Подбрасываются две правильные игральные кости (см. Пример 1.2.), рассмотрим три события: Легко проверить следующие соотношения,

то есть, события попарно независимы; однако,

следовательно, события не являются независимыми в совокупности.

**Пример 5.5.** Оказывается, и в обратную сторону та же проблема: из не следует попарная независимость. Действительно, рассмотрим теперь такие события:

Вычислив вероятности убеждаемся, что

но

,

и значит события не являются попарно независимыми.

Рассмотрим теперь эксперимент, заключающийся в последовательном повторении одного и того же испытания, причем испытания имеют являются статистически независимыми. Возьмем некоторое случайное событие , вероятность которого обозначим *p*. Если дважды проводим статистическое испытание, в результате которого событие может наступить (с вероятностью *p*), либо не наступить (вероятность чего обозначим ), то возможные исходы с их вероятностями легко перечислить, предполагая, что наступление события (“успех” обозначаем его единицей 1) или не наступление его (“неуспех”, обозначаем нулем 0) независимы:

Если число последовательных испытаний взять равным 3, то получим 8 исходов (количество двоичных последовательностей длины 3), вероятности которых находим из того же свойства независимости, например, а вероятность того, что из трех испытаний в двух наступит успех, равна сумме вероятностей

Обобщая эту формулу для *n* испытаний и *k* успехов, получим вероятность того, что в *n* последовательных независимых испытаниях наступит *k* успехов:

Такая модель последовательностей независимых испытаний в теории вероятностей носит название ***схемы Бернулли***. Вероятность успеха в одном испытании и число испытаний являются параметрами, определяющими конкретную схему Бернулли.

Применяя формулу бинома Ньютона,

убеждаемся, что сумма всех вероятностей в схеме Бернулли равна 1, как того требует ***условие нормировки*** (

Рисунок 5.1. показывает влияние вероятности успеха на распределение вероятностей по индексам *k* для *n* = 8 (здесь слева направо вероятность *p* принимает значения 0,3 0,5 0,7).

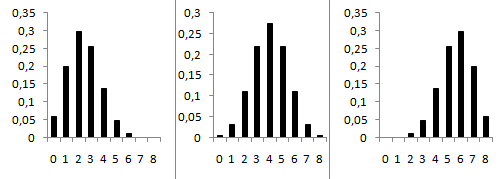


Рисунок 5.1. Вероятности в схеме Бернулли

Видно, что вероятности вначале растут с увеличением *k*, но затем уменьшаются. Значение , при котором достигается максимум (наиболее вероятное число успехов), можно найти, рассмотрев отношение

которое вначале больше 1, а справа от становится меньше 1.

Очень важный результат получается для схемы редких событий, когда вероятность успеха в одном испытании *p* мала, но число испытаний *n* велико.

**Теорема 5.1.** (теорема Пуассона) Пусть при вероятность *p = p(n)* стремится к нулю таким образом, что (*n)* ( - фиксированное положительное число), тогда

**Доказательство.** Преобразуем вероятность , подставив приближение для справедливое при больших *n*,

Длинная дробь справа равна:

а известная предельная формула

приводит в итоге к сформулированному утверждению теоремы.

Эта асимптотическая теорема имеет большое теоретическое значение в теории вероятностей. Ее можно также использовать для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли: при малых *p* (примерно и для